MORTARI, Cezar A.; PIRES DE OLIVEIRA, Roberta. Operadores modais: sistemas formais e línguas naturais. *ReVEL*, edição especial n. 8, 2014. [www.revel.inf.br].

OPERADORES MODAIS: SISTEMAS FORMAIS E LÍNGUAS NATURAIS

Cezar A. Mortari[1]

Roberta Pires de Oliveira[2]

c.mortari@ufsc.br

ropiolive@gmail.com

RESUMO: Este artigo procura apresentar a contribuição da semântica de ordenação, tal como apresentada por Angelika Kratzer, no desenvolvimento dos sistemas formais utilizados para a descrição semântica de línguas naturais. Apresentaremos o que são operadores modais, de um ponto de vista lógico, e analisamos as relações entre tais modelos formais e auxiliares modais em uma língua natural como o português brasileiro.
PALAVRAS-CHAVE: Operadores modais; modelos relacionais; modelos de vizinhanças, semântica de ordenação.

INTRODUÇÃO

Nosso objetivo, neste artigo, é mostrar onde entra a contribuição da *semântica de ordenação*, tal como apresentada por Angelika Kratzer (2012), no desenvolvimento dos sistemas formais utilizados para a descrição das línguas naturais. Linguistas estão interessados em entender as línguas naturais como o português brasileiro, o turco, o karitiana … Semanticistas formais utilizam a lógica ou os sistemas formais como metalinguagem para a descrição dos fenômenos do significado.[3] Ao fazerem esse movimento, porém, acabam por estender os limites do cálculo formal, criando sistemas que apreendem com mais acuidade as línguas naturais. É esse movimento entre a lógica e a análise das línguas naturais que iremos percorrer brevemente neste artigo, ao final do qual esperamos dar ao leitor uma primeira ideia da contribuição de Kratzer.

Nosso objeto de estudos são os auxiliares modais no português brasileiro. Veremos

[1] Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC.
[2] Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC; Pesquisadora CNPq.
[3] Para uma apresentação da perspectiva da semântica formal das línguas naturais, ver Borges *et al*. (2012).

que para modelar esses auxiliares precisamos ir além da semântica verofuncional. Os operadores verofuncionais da lógica proposicional clássica (‘não’, ‘e’, ‘ou’ etc.) não conseguem captar a intensionalidade que está presente nos auxiliares modais, como ‘dever’, ‘poder’ e ‘ter que/de’. Esse é o tópico da primeira seção. Introduzimos então os operadores *modais* ‘quadrado’ (□) e ‘losango’ (◊), costumeiramente entendidos como operadores de necessidade e possibilidade aléticas (“modos de verdade”) e concebidos como *quantificadores sobre mundos possíveis*. Na segunda seção, veremos que uma linguagem modal que se limita a acrescentar □ e ◊ a uma linguagem clássica não consegue apreender a semântica dos auxiliares modais no português. Iremos, então, apresentar os modelos relacionais, em que há relação de acessibilidade. Veremos que esse tipo de modelo resolve alguns problemas, mas, mais uma vez, não capta os significados dos auxiliares modais no português brasileiro. Finalmente, apresentamos a semântica de vizinhanças, desenvolvida inicialmente por D. Scott e R. Montague como uma generalização de modelos relacionais, e que subsidia a proposta de Kratzer (2013) para os modais nas línguas naturais. Concluiremos que esse é o melhor modelo lógico, mas que ainda assim não capta os modais nas línguas naturais; para tanto, precisamos de um modelo que capte a ideia de comparação, a contribuição dada por Kratzer através da semântica de ordenação.

1. Operadores verofuncionais e as línguas naturais

Nosso objeto de estudos são os auxiliares modais no português brasileiro. A sentença abaixo é um exemplo padrão de sentença com um auxiliar modal. Ela coloca uma série de problemas. Para este artigo, interessa refletir sobre o significado dos auxiliares, sobre o significado de ‘pode’, tal como em:

(1) João pode estar na festa.

Intuitivamente, entendemos que há uma possibilidade de João estar na festa. Mas o que significa haver uma possibilidade? Como podemos modelar essa ideia? O falante que profere (1) veicula que ele não sabe se João está ou não na festa, mas que João estar na festa é um estado de coisas compatível com o que ele sabe. Algo como: é compatível com o que o falante sabe que João está na festa. Podemos então considerar que ‘pode’ é um operador que atua sobre a proposição expressa por ‘João está na festa’ e afirma que ela é uma possibilidade.

Em outras palavras, a sentença acima corresponde, grosseiramente, à seguinte forma lógica:

(2) ⟨pode⟩ (João está na festa).

Cada um dos auxiliares modais no português brasileiro dá uma contribuição diferente para o significado e todos podem ser descritos como tendo a mesma forma lógica: os auxiliares são operadores sobre a proposição. Por enquanto, basta perceber que os auxiliares operam sobre a proposição e que cada um contribui de um modo para o significado do todo – compare-se (1) com as sentenças em (3) e (4):

(3) João deve estar na festa.

(4) João tem que estar na festa.

Tendo em vista nosso objetivo, que é entender a semântica dos auxiliares modais, podemos, numa primeira aproximação, desprezar a contribuição dos elementos que compõem o que a literatura costuma chamar, a partir de von Fintel (2006), de sentença prejacente. Podemos, assim, considerar que 'João está na festa', a sentença prejacente, expressa uma totalidade semântica (uma proposição) cuja estrutura interna não será especificada. Vamos, assim, iniciar apresentando uma linguagem proposicional. É claro que há linguagens lógicas que permitem olharmos internamente para os elementos que compõem uma sentença, mas para os nossos objetivos neste artigo uma linguagem proposicional é suficiente.

Consideremos uma linguagem formal proposicional qualquer: temos (i) sentenças *atômicas* ou *simples*, cuja estrutura interna não é analisada, bem como (ii) sentenças *moleculares* ou *complexas*, que são geradas inicialmente a partir das atômicas por meio de uma ou mais aplicações de *operadores*. Para os propósitos deste trabalho, e de um ponto de vista sintático, um operador é uma expressão que toma uma ou mais sentenças como argumentos, gerando uma sentença mais complexa. Note-se que, como entidade sintática, tudo o que temos na linguagem é um *símbolo de operador*. Semanticamente, um operador gera um valor semântico para uma sentença complexa partir de uma certa entrada (o valor semântico da sentença ou sentenças componentes). Valores semânticos de sentenças podem ser *valores de verdade*, ou *proposições*, como veremos depois.

Como exemplo, tomemos um conjunto L qualquer de *letras sentenciais* (também chamadas *variáveis proposicionais*), que denotaremos por p, q, r etc., e que constituem nossas sentenças atômicas. Em geral, elas são usadas para representar sentenças simples do português, como:

p: João está na festa.

q: Maria está na festa.

Sentenças complexas, como dito acima, são geradas a partir das atômicas usando-se operadores. Novas aplicações de operadores às sentenças obtidas vão gerando sentenças ainda mais complexas. A tabela a seguir mostra os operadores mais conhecidos e suas leituras informais em português:

$\neg p$	não *p* não é o caso que *p* é falso que *p*	negação
$p \wedge q$	*p* e *q* *p* mas *q*	conjunção
$p \vee q$	*p* ou *q* *p* e/ou *q*	disjunção
$p \rightarrow q$	se *p* então *q* se *p*, *q* *q*, se *p*	implicação
$p \leftrightarrow q$	*p* se e somente se *q* *p* é equivalente a *q*	equivalência

Tabela 1: Operadores usuais

Assim, uma sentença como ‘João está na festa, mas Maria não’ fica representada como

(5) $p \wedge \neg q$.

Ela foi obtida a partir de p e q aplicando-se, primeiro, o operador de negação à sentença atômica q, gerando $\neg q$. A seguir, aplicou-se o operador de conjunção às sentenças p e $\neg q$, gerando (5).

Uma característica comum aos operadores listados acima é que eles são bastante simples de um ponto de vista semântico: são *verofuncionais*, ou *funções de verdade*.

Vejamos os detalhes. Em primeiro lugar, temos dois objetos, chamados *valores de verdade*, que podemos representar por 1 (o *verdadeiro*) e 0 (o *falso*). E em segundo lugar, temos *pontos de valoração*. Note-se que não é preciso denominá-los ‘mundos possíveis’.

Pontos de valoração são apenas isso: pontos, estados, instantes, situações, índices – inclusive mundos possíveis (e até impossíveis) – nos quais as sentenças obtêm um valor de verdade, 1 ou 0, segundo certas regras. Nesse caso, os valores de verdade servem como valores semânticos para sentenças.

A atribuição de um valor às sentenças é feita em dois passos: em primeiro lugar, a toda sentença atômica é atribuído, arbitrariamente, um (e só um) valor 1 ou 0 em algum ponto de valoração. Obviamente, uma sentença atômica pode receber valores diferentes em pontos diferentes: por exemplo, pode ser verdadeira hoje e falsa amanhã; ou ser falsa em Florianópolis, mas verdadeira em João Pessoa, etc.

Para um exemplo, consideremos o diagrama na figura 1, contendo três pontos, rotulados a, b e c. A sentença atômica p é verdadeira em a e b; q é verdadeira em b e c. Se φ é uma sentença qualquer, e x algum ponto, escrevemos $[\![\varphi]\!]^x = 1$ para indicar que φ é verdadeira em x, e $[\![\varphi]\!]^x = 0$, claro, se φ é não verdadeira (portanto, falsa) em x. Temos, por exemplo, $[\![p]\!]^a = 1$, mas $[\![p]\!]^c = 0$.

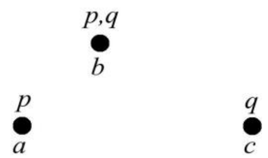

Figura 1: Pontos de valoração

Num segundo passo, todas as demais sentenças recebem um valor em cada ponto de valoração. Como isso é feito depende de como interpretamos os operadores que ocorrem na sentença: cada operador dá uma certa contribuição para o valor de verdade de uma sentença. Tomemos a negação como ponto de partida: uma sentença negada ¬φ é verdadeira num determinado ponto de valoração se φ é falsa em tal ponto; é falsa, se é verdadeira. O que podemos representar na tabela de verdade a seguir:

φ	¬φ
1	0
0	1

Tabela 2: Negação

Como podemos ver, a única informação necessária para computar o valor de ¬φ em algum ponto é o valor de φ naquele ponto. O operador clássico ¬ de negação, assim, corresponde à função de verdade descrita na tabela acima.

O mesmo pode ser dito dos outros operadores acima listados. Conforme a tabela 3:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1

Tabela 3: Operadores binários

Esses operadores são os mais conhecidos, mas há muitos outros. Por exemplo, há outras doze funções de verdade de dois argumentos além das quatro listadas acima (‘nem … nem …’, para apenas um exemplo). Em geral, para cada número *n* de argumentos, temos 2^{2^n} funções de verdade. Contudo, se um operador *n*-ário qualquer é uma função de verdade, então ele pode ser definido usando-se ¬, ∧ e ∨. Por exemplo, os operadores de implicação → e de disjunção exclusiva $\veebar$ podem ser definidos assim:

$$\varphi \rightarrow \psi \ := \ \neg(\varphi \wedge \neg\psi),$$
$$\varphi \veebar \psi \ := \ (\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi).$$

Até aqui não estivemos especificando o que, afinal, é um ponto de valoração. Para linguagens que contêm apenas operadores verofuncionais, podemos representá-los simplesmente por uma função do conjunto *L* das letras sentenciais de uma linguagem no conjunto {1,0} de valores de verdade: uma *valoração*. No exemplo da figura 1, o ponto *a* pode ser representado pela função f_a tal que $f_a(p) = 1$ e $f_a(q) = 0$, e analogamente para os demais pontos.

A questão que se coloca agora é até que ponto essa linguagem lógica pode ser utilizada para captar as línguas naturais como o português brasileiro.

A primeira consideração é que uma linguagem lógica é bastante plástica e podemos inventar outros símbolos, com outras interpretações. Consideremos a negação, para um exemplo inicial. A negação verofuncional não é a única negação que se pode definir em um sistema lógico. Podemos facilmente ter dois (ou até mais) operadores chamados ‘negação’ em nossas linguagens formais, digamos, $\neg$ e ~. Reservemos o símbolo $\neg$ para a negação clássica, e vamor dar ao símbolo ~ um novo significado. Suponhamos que as condições de verdade para sentenças com ~ sejam as seguintes (onde x é um ponto de valoração qualquer):

- se $[\![{\sim}\varphi]\!]^x = 0$, então $[\![\varphi]\!]^x = 1$;
- se $[\![{\sim}\varphi]\!]^x = 1$, então $[\![\varphi]\!]^x$ recebe 1 ou 0 arbitrariamente.

É imediato que não podemos determinar o valor de ~φ se tivermos apenas o valor de φ – se φ tem valor 0, então ~φ tem valor 1, como na negação clássica; contudo, se φ tem valor 1, ~φ pode obter 0 ou também 1, ou seja, *ambas* φ e ~φ podem ser verdadeiras em algum ponto. Assim, ~ é uma espécie de negação paraconsistente (porque $\varphi \wedge {\sim}\varphi$ não é sempre falsa). Analogamente, podemos ter uma negação como a da lógica intuicionista, em que $\approx p$ é verdadeira se estiver *demonstrado* que p não é o caso. Com esse tipo de negação, $p \vee \approx p$ não é sempre verdadeira (pode ser que não tenhamos uma demonstração nem de p, nem de $\approx p$).

Ora, se temos, de um ponto de vista formal, três (ou ainda mais) negações, qual delas corresponde à negação em português?

Provavelmente $\neg$.[4] Assim, por "corresponde" entendemos que as condições de verdade de uma sentença negada em PB são as mesmas dadas pelas condições de verdade de uma sentença formada com $\neg$. Para usar um exemplo:

'Não é verdade que João está na festa' é verdadeira em um ponto x

se, e somente se,

$[\![\neg(\text{João está na festa})]\!]^x = 1$.

Contudo, se as coisas são mais ou menos claras no que diz respeito à negação, certamente o são menos quando tratamos de conjunção e disjunção. De fato, o operador $\wedge$ parece não corresponder inteiramente ao 'e' em português.[5] Costuma-se apresentar sentenças como a seguinte como contraexemplos:

---

4 A queixa usual é de que ~ não é realmente uma negação, pois não é possível que uma sentença e sua negação sejam ambas verdadeiras – e um operador de negação digno desse nome deve formar sentenças contraditórias (isto é, que sempre têm valores opostos).

5 Note-se que o objetivo com que foi criada a lógica clássica era a representação formal de padrões de inferência utilizados na matemática, ou em modelos matemáticos do mundo, sem a pretensão de que seus operadores, como '$\neg$' e '$\wedge$', correspondessem a todo e qualquer uso de 'não', 'e' etc., em linguagens naturais.

(6) João pulou do edifício e morreu.

Ora, $\wedge$ é comutativo ($p \wedge q$ e $q \wedge p$ são equivalentes): uma conjunção de duas sentenças é verdadeira se ambas o forem, não importa a ordem em que apareçam na sentença conjuntiva. Isso não parece acontecer com 'e' em todos os casos – obtemos um significado diferente ao inverter a ordem das sentenças simples em (6). Além disso, nas línguas naturais temos várias questões que não se colocam para o cálculo; por exemplo, em (6), não há um sujeito explícito na segunda sentença, embora ninguém tenha problemas em identificar a anáfora com 'João'. Logo, $\wedge$ parece ser uma espécie de versão regimentada de 'e'. Quanto a disjunções, temos a *inclusiva* ($\vee$: p ou q ou ambos) e a *exclusiva* ($\underline{\vee}$: p ou q, mas não ambos). Qual delas corresponde melhor ao 'ou' em português?

Há duas soluções para a dificuldade acima. Por um lado, pode-se dizer que um dos significados de 'e' e 'ou' é o básico: 'e' corresponde a $\wedge$ e 'ou' corresponde a $\vee$; fenômenos como a não comutatividade (como no exemplo acima) ou caráter exclusivo da disjunção são explicados por considerações contextuais ou pragmáticas.[6] Assim, há apenas uma representação de (6), $p \wedge q$.

Por outro lado, pode-se dizer que operadores do português como 'não', 'e' e 'ou' podem corresponder a diferentes operadores lógicos, e a "tradução" do português para uma linguagem formal leva isso em conta. No caso da conjunção, podemos facilmente definir um outro operador $\triangleright$, 'e então', que não seja comutativo, isto é, '$p \triangleright q$' não fica sendo equivalente a '$q \triangleright p$'. As condições de verdade poderiam ser, por exemplo:

$$[\![\varphi \triangleright \psi]\!]^{x} = 1 \text{ sse } [\![\varphi]\!]^{x} = 1 \text{ e, para algum } y \text{ posterior a } x, [\![\psi]\!]^{y} = 1.$$

Note-se que tal operador já não seria verofuncional. Dispondo dele, diríamos que a sentença (6) expressa duas proposições distintas, uma representada por $p \wedge q$, outra representada por $p \triangleright q$. Essas são questões delicadas, mas a tendência na semântica das línguas naturais, tendo em vista seu caráter empírico e a necessidade de explicar a aquisição da linguagem, é considerar que o significado semântico é o mais fraco, aquele que diz menos, e é, portanto, verdadeiro num maior número de situações. As demais interpretações são derivadas

6 A interpretação exclusiva do 'ou' é derivada através da implicatura que explora a máxima da quantidade; ver Pires de Oliveira & Basso (2014).

pragmaticamente, via implicaturas.

Iniciamos a seção sugerindo que os auxiliares modais são operadores. Mas eles não se comportam como os operadores que apresentamos até o momento. Vejamos por que não.

2. QUADRADO(S) E LOSANGO(S); 'DEVE' E 'PODE'

A chamada *linguagem modal básica* acrescenta à linguagem proposicional clássica, que apresentamos na seção anterior, dois novos operadores, □ e ◊, tradicionalmente interpretados como necessidade e possibilidade *aléticas*, e que dizem respeito ao que é logicamente (ou metafisicamente) necessário e possível ('Necessariamente, dois mais dois é quatro'; 'Necessariamente, a água é H_2O'; 'Possivelmente, há objetos que se deslocam mais rápido do que a luz'). Como veremos adiante, a modalidade alética é um tipo de modalidade, em que 'deve' e 'pode' representam os *modos de verdade* de uma proposição (necessariamente verdadeira, possivelmente verdadeira). Operadores modais usualmente vêm em pares: um forte (□) e um fraco (◊). Dizemos que eles são *duais*, e podem ser interdefinidos (em linguagens contendo negação) da seguinte maneira:

$\Box\varphi := \neg\Diamond\neg\varphi$,

$\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$.

Esses novos operadores *não são* verofuncionais. Se o fossem, a lógica modal seria apenas a lógica proposicional clássica com alguns operadores definidos a mais, o que ela, intuitivamente, não é. Se tentarmos construir tabelas de verdade para □ e ◊, chegaremos às seguintes tabelas incompletas:

φ	$\Box\varphi$	$\Diamond\varphi$
1	?	1
0	0	?

De fato, se φ é falsa então não é necessariamente verdadeira, de modo que $\Box\varphi$ é falsa. Mas e se φ for verdadeira? Essa informação apenas não é suficiente para decidir o valor de $\Box\varphi$ (e considerações semelhantes aplicam-se a ◊).

Isso faz de □ e ◊ operadores *modais* (também podemos chamá-los de operadores *intensionais*). Eles não são, contudo, os únicos. Podemos generalizar nossa linguagem modal básica de duas maneiras: primeiro, podemos ter vários quadrados e losangos (outros operadores modais unários); segundo, podemos ter operadores que sejam binários, ternários etc. No que denominamos a *linguagem temporal básica*, temos dois pares de operadores: *G* e *F* (respectivamente, um operador forte e um fraco para o futuro: 'será sempre o caso que' e 'será alguma vez o caso que') e *H* e *P* (idem, para o passado). Uma linguagem *epistêmica* pode ter três operadores fortes, *K*, *C* e *B*, representando conhecimento, convicção e crença (um agente epistêmico 'sabe que', 'está convencido de que', 'acredita que'), juntamente com seus duais fracos. Uma linguagem *deôntica* terá operadores *O*, *F* e *P*, representando obrigações, proibições e permissões ('é obrigatório que', 'é probido que', 'é permitido que'), e assim por diante. De um ponto de vista lógico, todos esses operadores são, em um sentido amplo do termo, modais – e podemos tê-los *todos* em alguma linguagem. Isso nos permite representar sentenças como:

(7) João acredita que é possível que Maria vá ser obrigada a vender seu carro,

isto é,

(7′) [João acredita que [possivelmente [será o caso que [obrigatoriamente [Maria vende seu carro]]]]]

Usando *r* para 'Maria vende seu carro', (7′) é representada como

$$B\Diamond FOr.$$

Um primeiro problema com que nos deparamos se queremos dar uma semântica para as sentenças em (1), (3) e (4) é que essas sentenças podem ter mais de uma leitura. Considere-se a sentença (1), por exemplo, 'João pode estar na festa'. Ela pode ser interpretada como: João tem *permissão* para estar na festa (e temos aqui uma modalidade deôntica), ou então, João estar na festa é compatível com o que o falante *sabe* (e temos uma modalidade epistêmica). No modelo que aqui se está propondo, essa sentença terá, então, representações diferentes dependendo do tipo de modalidade expressa por 'pode':

$$Pp,$$
$$\neg K\neg p.$$

No primeiro caso, João tem permissão de estar na festa (modalidade deôntica); no segundo, é possível, tanto quanto o falante saiba, que João esteja na festa, isto é, o falante não tem conhecimento de que João não esteja na festa (modalidade epistêmica). De um ponto de vista lógico, as diferentes modalidades expressas por ‘pode’ serão representadas por operadores (itens lexicais) diferentes de uma linguagem formal; não há uma preocupação com a plausibilidade psicológica, pois o objetivo não é esse. Ou seja: em uma linguagem formal podemos ter um grande número de operadores B_j, B_m, B_c, …, para ‘João acredita que’, ‘Maria acredita que’, ‘Claudia acredita que’ …, mas provavelmente temos (em português) apenas um operador para ‘acredita que’. O mesmo raciocínio se aplica a ‘pode’: logicamente, podemos entender que há diferentes entradas lexicais, ‘$\text{pode}_{\text{DEÔNTICO}}$’, ‘$\text{pode}_{\text{EPISTÊMICO}}$’, ‘$\text{pode}_{\text{CAPACIDADE}}$’ (‘João pode ajudar em matemática.’). Kratzer (2013) propõe que há apenas um auxiliar ‘pode’ e o tipo de modalidade é obtida pelo fundo conversacional (e base modal). Para a autora, ‘pode’ não é um operador unário, como aparece nessa linguagem lógica, mas um operador binário que relaciona uma proposição e um fundo conversacional. Essa ideia ficará mais clara nas próximas seções.

Todos os operadores acima exemplificados são unários, mas podemos também ter operadores modais de qualquer número *n* de argumentos. Para um exemplo, a motivação para o surgimento de lógicas modais no início do século XX, com C. I. Lewis, foi a introdução de uma implicação mais forte que o operador $\rightarrow$ da lógica clássica: a *implicação estrita*, que representaremos aqui por $\Rightarrow$. Esse operador, binário, pode ser definido assim:

$$\varphi \Rightarrow \psi \ := \ \neg\Diamond(\varphi \ \wedge \neg\psi).$$

E, claro, podemos ter outros operadores de implicação, por exemplo, $\Box\!\!\rightarrow$, para representar contrafactuais como ‘se fosse o caso que *p*, seria o caso que *q*’, ou um operador binário $\circ$ tal que $p \circ q$ representa ‘*p* é compatível com *q*’, e assim por diante.

Em linguagens modais generalizadas, portanto, podemos ter um número qualquer de operadores modais *n*-ádicos, denominados *nablas* (∇, operadores fortes) e *triângulos* (Δ, operadores fracos).[7] De fato, o $\Box$ usual é um nabla unário, e $\Diamond$, um triângulo unário. Nablas e triângulos são duais; podendo ser interdefinidos assim:

$$\nabla(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) := \neg\Delta(\neg\varphi_1,\ldots,\neg\varphi_n);$$

$$\Delta(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) := \neg\nabla(\neg\varphi_1,\ldots,\neg\varphi_n).$$

O que são, então, operadores modais? Para os propósitos deste trabalho, em que nos restringiremos a linguagens proposicionais, um operador $\bullet(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ é um operador modal se os valores de verdade de $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ em algum ponto de valoração x não são suficientes para computar o valor de $\bullet(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ em x. Precisamos de algo mais.

Mas voltemos à linguagem modal básica, apenas com $\Box$ e $\Diamond$, entendidos como modalidades aléticas. Como eles não são verofuncionais, as condições de verdade para sentenças modalizadas são tradicionalmente formuladas com auxílio de mundos possíveis: temos então a chamada *semântica de mundos possíveis*. Seguindo a ideia leibniziana, necessidade é verdade em todos os mundos possíveis; possibilidade, verdade em pelo menos um. Assim, se temos um conjunto U de pontos de valoração (que podem ser “mundos possíveis”), temos as seguintes condições, para qualquer $x \in U$:

- $\Box\varphi$ é verdadeira em x sse para todo $y \in U$, φ é verdadeira em y;
- $\Diamond\varphi$ é verdadeira em x sse para algum $y \in U$, φ é verdadeira em y.

Os detalhes formais vêm a seguir.

Definição 1. Um *modelo M* para a linguagem modal básica é um par $\langle U,V\rangle$, tal que:

(i) U é um conjunto não vazio (pontos de valoração);

(ii) V é uma valoração, isto é, uma função de L no conjunto $\wp(U)$ (o conjunto de todos os subconjuntos de U).

Em outras palavras, V associa a cada letra sentencial em L um conjunto de pontos – uma *proposição*. Proposições são costumeiramente modeladas como conjuntos de mundos

7 Uma apresentação detalhada de linguagens modais generalizadas e sua semântica pode ser encontrada em Blackburn *et al.* 2001.

possíveis; aqui, uma proposição em um conjunto U é simplesmente um subconjunto qualquer de U. Intuitivamente, se p é alguma sentença de alguma linguagem, a proposição expressa por p em relação a U é o conjunto dos pontos de U nos quais a sentença p é verdadeira.

Para efeitos de ilustração, apresentamos a seguir uma definição completa de verdade para uma linguagem proposicional, mas estamos interessados apenas nas cláusulas para os operadores modais.

Definição 2. Seja $M = \langle U,V \rangle$ um modelo e x um elemento de U. Definimos indutivamente a noção de uma sentença ser *verdadeira em um ponto x* (o que escrevemos como $[\![\varphi]\!]^{M,x} = 1$, ou $[\![\varphi]\!]^{x} = 1$, para simplificar) como segue:

(a) $[\![\mathbf{p}]\!]^{x} = 1$ sse $x \in V(\mathbf{p})$, para toda $\mathbf{p} \in L$;

(b) $[\![\neg\varphi]\!]^{x} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]^{x} = 0$;

(c) $[\![\varphi \wedge \psi]\!]^{x} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]^{x} = 1$ e $[\![\psi]\!]^{x} = 1$;

(d) $[\![\varphi \vee \psi]\!]^{x} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]^{x} = 1$ ou $[\![\psi]\!]^{x} = 1$;

(e) $[\![\varphi \rightarrow \psi]\!]^{x} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]^{x} = 0$ ou $[\![\psi]\!]^{x} = 1$;

(f) $[\![\varphi \leftrightarrow \psi]\!]^{x} = 1$ sse $[\![\varphi]\!]^{x} = [\![\psi]\!]^{x}$;

(g) $[\![\Box\varphi]\!]^{x} = 1$ sse para todo $y \in U$, $[\![\varphi]\!]^{y} = 1$;

(h) $[\![\Diamond\varphi]\!]^{x} = 1$ sse há algum $y \in U$ tal que $[\![\varphi]\!]^{y} = 1$.

No caso do modelo representado na figura 1, vemos que $[\![\Diamond p]\!]^{a} = 1$ (pois p é verdadeira em pelo menos um ponto), mas $[\![\Box p]\!]^{a} = 0$ (já que p não é verdadeira em todos os pontos, pois $[\![p]\!]^{c} = 0$). Por outro lado, a sentença $p \vee q$ é necessária em a, já que, em qualquer ponto x do modelo, $[\![p \vee q]\!]^{x} = 1$. Assim, $[\![\Box(p \vee q)]\!]^{a} = 1$. O mesmo vale para b e c, e é fácil ver que, se $\Box\varphi$ ou $\Diamond\varphi$ forem verdadeiras em algum ponto, sê-lo-ão em todos.

A definição acima nos permite, dada uma sentença φ qualquer de uma linguagem proposicional, determinar qual a proposição (conjunto de pontos) expressa por φ em um modelo M:

$$(\varphi)^{M} = \{x \in U : [\![\varphi]\!]^{x} = 1\}.$$

No caso do modelo representado na figura 1, vemos que $(p)^M = \{a,b\}$, e $(q)^M = \{b,c\}$, pois *p* é verdadeira nos pontos *a* e *b*, e *q* é verdadeira em *b* e *c*.

A definição de verdade acima parece adequada, se entendemos $\Box$ e $\Diamond$ como representando necessidade e possibilidade *lógica* ou *metafísica* – ou seja, operadores modais em um sentido estrito. Uma sentença $\Box p$ é verdadeira em algum ponto ("mundo") se *p* é verdadeira em todos. Não é difícil, assim, mostrar que sentenças como $\Box p \rightarrow p$, $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ e $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ resultam *logicamente válidas,* isto é, verdadeiras em qualquer ponto de valoração de qualquer modelo. Por exemplo, se $\Box p$ é verdadeira em algum ponto *x* de algum modelo, então, pela cláusula (g) da definição 2, *p* é verdadeira em todos os pontos do modelo – inclusive no ponto *x*. Ora, se *p* é verdadeira no ponto *x*, isso faz com que a implicação $\Box p \rightarrow p$ seja verdadeira em *x*. O que está de acordo com nossas intuições de que uma sentença *p* que é logicamente necessária (e, assim, $\Box p$ é o caso) é também verdadeira.

Contudo, há muitos outros tipos de necessidade e possibilidade, como vimos anteriormente. Quando dizemos que 'É necessário que João preencha sua declaração de renda', não estamos querendo dizer que isso é lógica ou metafisicamente necessário – mas, talvez, que João tem a *obrigação* de preencher sua declaração de renda.

Contudo, pelas condições acima, se utilizarmos $\Box$ para representar 'é obrigatório que' ou 'estou convencido de que', teremos um problema. Como vimos, se $\Box p$ é verdadeira, *p* é verdadeira – o que não funciona para obrigações e convicções. João pode ter a obrigação de fazer sua declaração de renda, mas obrigações, infelizmente (ou felizmente, em certos casos), muitas vezes não são cumpridas. Ou Maria pode estar convencida de que João está na festa, mas isso não garante que ele esteja. Em outros termos, não podemos traduzir pelo quadrado o 'deve' da sentença em (3), 'João deve estar na festa', ou o 'tem que' da sentença (4), 'João tem que estar na festa', porque, se assim o fizermos, da verdade dessa sentença segue-se que João está na festa. Em outras palavras, dado que $\Box p \rightarrow p$ é logicamente válida, diríamos que a sentença a seguir também é:

(8) Se João deve estar na festa, então João está na festa.

O problema é que pode bem ser o caso que João tenha alguma obrigação de estar na festa (ele prometeu isso a Maria), mas, de fato, ele não está lá. E se entendemos 'deve' como um epistêmico – por tudo o que sabemos sobre as circunstâncias presentes de João, concluímos que ele deve estar na festa –, teremos o mesmo impasse: nada garante que ele esteja mesmo. Essa é uma indicação clara de que precisamos de uma semântica mais fina para conseguirmos captar o significado de ‘dever’ no português.

O problema se deve ao uso irrestrito dos quantificadores nas condições de verdade. Em outros termos, precisamos restringir o domínio da quantificação. Dizemos que p é possível se p é verdadeira em algum ponto de valoração – qualquer ponto. Mas e se estivermos falando de possibilidade física? Ainda que seja logicamente possível voar da Terra a Saturno em menos de cinco minutos, isso é fisicamente impossível (se a teoria da relatividade estiver correta). Assim, ao dizer que tal ou qual evento é fisicamente impossível, estamos restringindo o domínio de quantificação apenas a mundos em que a física é a mesma do nosso mundo – na terminologia usual, apenas tais mundos seriam *acessíveis* a um dado mundo. Uma das soluções, então, é restringir o escopo dos quantificadores.[8]

3. Modelos relacionais

Uma primeira estratégia para restringir o âmbito da quantificação na semântica dos operadores modais é o uso de modelos relacionais. Formalmente, os modelos ganham relações de acessibilidade e a definição de verdade passa a levar isso em consideração. No caso da linguagem modal básica (apenas $\Box$ e $\Diamond$), as condições (g) e (h) da definição de verdade ficam alteradas assim: para qualquer $x \in U$,

(g′) $[\![\Box\varphi]\!]^x = 1$ sse para todo $y \in U$ acessível a x, $[\![\varphi]\!]^y = 1$;

(h′) $[\![\Diamond\varphi]\!]^x = 1$ sse há algum $y \in U$ acessível a x tal que $[\![\varphi]\!]^y = 1$.

Consideremos um modelo como na figura 2 a seguir, em que representamos que um ponto y é acessível a x se há uma seta de x a y, e vejamos o que nele acontece. De acordo com a definição original de verdade, ou seja, a definição 2 acima, $[\![\Box q]\!]^b = 0$, pois há pelo menos um ponto, o ponto a, em que q é falsa. Contudo, levando agora em conta a relação de

8 Apresentar condições de verdade para sentenças modalizadas usando quantificadores não implica que só possamos usar os quantificadores universal e existencial usuais. Nada impede que tenhamos operadores cujas condições de verdade sejam dadas por quantificadores como ‘na maioria dos mundos’, ‘em poucos mundos’, ‘em finitamente muitos mundos’, ‘em exatamente cinco mundos’ etc. Não trataremos desses casos aqui.

acessibilidade, vemos que apenas c é acessível ao ponto b – e q é verdadeira em c. (Note-se que a, onde q é falsa, não é acessível a b.) Logo, $[\![\Box q]\!]^b = 1$.

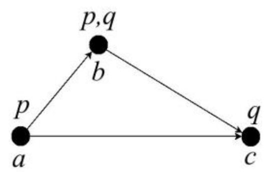

Figura 2: Modelo com acessibilidade

Assim, não apenas temos um conjunto U de pontos de valoração, mas também temos uma chamada *relação de acessibilidade* – que é simplesmente uma relação entre os m undos em U. Os detalhes formais vêm a seguir.

Definição 3. Um *modelo relacional* M para a linguagem modal básica é uma tripla $\langle U,R,V\rangle$, tal que:

(i) U é um conjunto não vazio (pontos de valoração);

(ii) $R \subseteq U \times U$ é uma relação binária (acessibilidade);

(iii) V é uma valoração, isto é, uma função de L em $\wp$(U).

E a nova definição de verdade (para simplificar, apenas as cláusulas modais):

Definição 4. Sejam $M = \langle U,R,V\rangle$ um modelo e x um elemento de U. Definimos indutivamente a noção de uma sentença ser *verdadeira em um ponto x* (o que escrevemos como $[\![\varphi]\!]^x$) como segue:

(g′) $[\![\Box\varphi]\!]^x = 1$ sse para todo $y \in U$ tal que Rxy, $[\![\varphi]\!]^y = 1$;

(h′) $[\![\Diamond\varphi]\!]^x = 1$ sse há algum $y \in U$ tal que Rxy e $[\![\varphi]\!]^y = 1$.

Introduzindo-se a relação de acessibilidade, certas sentenças deixam de ser válidas. Se a relação R não for *reflexiva* (se nem todo ponto é acessível a si próprio), não temos mais que a verdade de $\Box p$ em um ponto garanta a verdade de p nesse ponto. Isso é desejável, como vimos acima, se interpretamos $\Box$ como ‘acredita-se que’ ou ‘é obrigatório que’. Em nenhum desses casos segue-se, do fato de que alguém acredita que p, ou que p seja obrigatória, que p

seja o caso. Se desejamos, por outro lado, garantir que a verdade de $\Box p$ em um ponto garanta a verdade de p nesse mesmo ponto, basta exigir que a relação R seja reflexiva, isto é, para todo $x \in U$, Rxx. Considerações semelhantes valem para outras sentenças que desejemos validar. Por exemplo, para modalidades deônticas, podemos querer manter como um princípio válido que $Op \rightarrow Pp$, ou seja, se p é obrigatória, então é permitida. Para isso, basta requerer da relação de acessibilidade que seja *serial*, isto é: para todo x existe ao menos um y tal que Rxy.

Note-se que nas definições 2 e 4 acima as condições de verdade para sentenças com $\Box$ ou $\Diamond$ são dadas usando-se quantificação, universal para $\Box$ e existencial para $\Diamond$. Ouvimos com frequência que operadores modais são quantificadores sobre mundos possíveis – restritos ou não por meio de uma relação de acessibilidade. Mas são mesmo? Eles certamente podem ser, já que temos quantificação. E se tomarmos como U um conjunto – ou o conjunto – de mundos possíveis (entre os quais há um privilegiado que é, ou representa, o *mundo real*), então nossos operadores expressam, em certo sentido, quantificação sobre mundos possíveis.

Uma questão interessante é: o que *são* mundos possíveis, se os há? Para tal questão há muitas respostas: eles podem ser mundos genuínos (ou seja, coisas como universos paralelos), conjuntos de sentenças (de alguma linguagem), conjuntos de proposições, estados de coisas possíveis e maximais, conjuntos maximais de estados de coisas, propriedades do mundo, estados alternativos do mundo e assim por diante. Para os propósitos deste trabalho, essa questão não nos interessa: estamos falando sobre *pontos de valoração.* Tais pontos podem representar mundos possíveis, mas podem bem ser qualquer outra coisa, basta tomar algum conjunto não vazio (um conjunto de latas de cerveja serve muito bem) e uma relação binária nesse conjunto.

Para finalizar esta seção, mencionamos no início do artigo que os operadores poderiam ser vistos como operando sobre proposições. Considerando proposições como conjuntos de pontos em um modelo, podemos considerar nossos operadores como operações conjuntistas: à negação, por exemplo, corresponde a operação que, aplicada a um conjunto X qualquer, gera o *complemento* $-X$ de X; à conjunção, a operação que, aplicada a dois conjuntos X e Y, gera sua *intersecção* $X \cap Y$, e assim por diante. Não entraremos nos detalhes de tal abordagem aqui, mas, para efeitos de ilustração, teríamos o seguinte:

$(\neg\varphi)^M = -(\varphi)^M$,

$(\varphi \wedge \psi)^M = (\varphi)^M \cap (\psi)^M$,

$(\varphi \vee \psi)^M = (\varphi)^M \cup (\psi)^M$,

$(\varphi \to \psi)^M = -(\varphi)^M \cup (\psi)^M$,

$(\Box\varphi)^M = \{x \in U\colon\ \forall y \in U(Rxy \to y \in (\varphi)^M)\}$,

$(\Diamond\varphi)^M = -(\Box\neg\varphi)^M$.

4. MODELOS DE VIZINHANÇAS

Modelos relacionais, contudo, podem ser "fortes" demais para certas modalidades. Uma das características desses modelos é que as propriedades a seguir valem para qualquer operador de necessidade, mesmo que *R* seja uma relação binária *qualquer*, isto é, sem nenhum tipo de restrição:

(i) se φ é uma sentença válida, então □φ;

(ii) se □φ e ψ é consequência lógica de φ, então □ψ.

Consideremos (i): se φ é válida – verdadeira em qualquer ponto em qualquer modelo – então automaticamente □φ será verdadeira em qualquer ponto (logo, válida), pois não há nenhum ponto, acessível ou não, em que φ seja falsa. Analogamente para (ii). Para certas interpretações de □, isso não é aceitável. Entendendo-se o quadrado como um operado de conhecimento, (ii) acarreta que um agente automaticamente sabe toda proposição que for consequência lógica de seu conhecimento – uma exigência irrazoável para agentes humanos. Por exemplo, segundo as condições de verdade em modelos relacionais, se João sabe que a Terra gira ao redor do Sol, então ele também deveria saber que (9) é verdadeira:

(9) A Terra gira em torno de uma estrela de tipo G0.

Certamente, esse resultado é indesejável. Todos nós sabemos que a Terra gira ao redor do Sol, mas nem todos sabemos se (9) é mesmo verdadeira. Podemos não ter a mínima ideia sobre a verdade dessa proposição.

Um tipo mais geral de semântica que evita esses problemas são os chamados *modelos de vizinhanças*.

Definição 5. Um *modelo de vizinhanças* M para a linguagem modal básica é uma tripla ordenada $\langle U,f,V \rangle$, em que:

(i) U é um conjunto não-vazio;

(ii) $f : U \to \wp(\wp(U))$ (função de vizinhanças);

(iii) V é uma valoração (uma função de L em $\wp(U)$).

O papel de f é o de atribuir, a cada ponto x no modelo, um conjunto de *conjuntos de mundos* – ou seja, um conjunto de *proposições*. Intuitivamente, o conjunto de proposições associadas por f a um ponto x são aquelas proposições "necessárias" (obrigatórias, conhecidas, etc.) em x. Veremos logo a seguir um exemplo de como isso funciona, mas antes apresentamos a definição de verdade, que fica assim (mais uma vez, apenas as cláusulas modais):

Definição 6. Seja $M = \langle U,f,V \rangle$ um modelo de vizinhanças. Definimos indutivamente a noção de uma sentença ser verdadeira em um ponto x de U como segue:

(g″) $[\![\Box\varphi]\!]^x = 1$ sse $(\varphi)^M \in f(x)$;

(h″) $[\![\Diamond\varphi]\!]^x = 1$ sse $-(\varphi)^M \notin f(x)$.

Na definição acima, $(\varphi)^M$ representa, como antes, a *proposição* expressa por φ em M (o conjunto de pontos em que φ é verdadeira).

Um pouco de reflexão mostra que os problemas (i) e (ii) anteriormente apontados para os modelos relacionais desaparecem; vejamos como, considerando como exemplo o problema (i): se φ é uma sentença válida, então $\Box\varphi$. Tomemos uma tautologia como $p \to p$: como essa sentença é válida, ou seja, verdadeira em todos os pontos, a proposição expressa por $p \to p$ no modelo (o conjunto dos pontos em que $p \to p$ é verdadeira) é o próprio universo U. Temos, assim, que $(p \to p)^M = U$. Contudo, se U não for uma das proposições contidas em $f(x)$, para algum x, então $[\![\Box(p \to p)]\!]^x = 0$. Consideremos o modelo representado na figura 1, acrescido agora de uma função de vizinhanças. Seja então $M = \langle U,f,V \rangle$, em que:

$U = \{a,b,c\}$,

$f(a) = \{\{a\},\{a,b\}\}$, $f(b) = \{\{b\},U\}$, $f(c) = \{\emptyset,\{b\}\}$,

$V(p) = \{a,b\}$, $V(q) = \{b,c\}$.

Vemos, por exemplo, que $[\![\Box p]\!]^a = 1$, pois $(p)^M = \{a,b\}$, e $\{a,b\} \in f(a)$. Já no caso da tautologia $p \to p$, como $(p \to p)^M = U$ e $U \notin f(a)$, $[\![\Box(p \to p)]\!]^a = 0$. Por outro lado, $[\![\Box(p \to p)]\!]^b = 1$, já que $U \in f(b)$. Assim, se $\Box$ estiver representando uma modalidade epistêmica como 'acredita que', para um certo agente, no ponto b o agente acredita que $p \to p$, mas não no ponto a.

Contudo, a definição acima pode ser geral demais para certas modalidades. Talvez queiramos manter que, se é obrigatório que $p \wedge q$, então tanto p quanto q, que se seguem logicamente de $p \wedge q$, devem também ser obrigatórios. Modelos como acima definidos não garantem isso. Note-se que, no modelo acima, $[\![\Box(p \wedge q)]\!]^c = 1$, pois $(p \wedge q)^M = \{b\}$, e $\{b\} \in f(c)$. Mas p segue-se logicamente de $p \wedge q$; contudo, $[\![\Box p]\!]^c = 0$, dado que $(p)^M = \{a,b\}$, e $\{a,b\} \notin f(c)$.

Nesse caso particular, há duas estratégias: assim como podíamos colocar restrições (reflexividade, etc.) na relação de acessibilidade em modelos relacionais, podemos colocar alguma restrição na definição da função f. Para apenas um exemplo, considere-se a condição (m) a seguir. Sejam X e Y dois subconjuntos quaisquer de U (ou seja, duas proposições quaisquer) e $x \in U$:

(m) se $X \cap Y \in f(x)$, então $X \in f(x)$ e $Y \in f(x)$.

A condição (m) diz que, se a conjunção $X \cap Y$ de duas proposições X e Y pertence a $f(x)$, então cada uma delas também. Isso garante que, se uma conjunção $p \wedge q$ é obrigatória (sabida, acreditada) em x, então tanto p quanto q também são obrigatórias (sabidas, acreditadas) em x.

Alternativamente, podemos alterar a cláusula da definição de verdade que diz respeito ao operador de necessidade. Por exemplo, em uma nova redação de (g″), temos:

(g‴) $[\![\Box\varphi]\!]^x = 1$ sse $\bigcap f(x) \subseteq (\varphi)^M$.

Isso é equivalente a dizer que φ é uma necessidade em x se for consequência lógica dos elementos de $f(x)$ – ou seja, se for consequência lógica das proposições necessárias de x. Para deixar isso mais claro, uma proposição é consequência lógica de um conjunto X de proposições se for verdadeira em todo ponto de valoração em que todos os elementos de X forem verdadeiros – que são justamente os pontos pertencentes a $\bigcap f(x)$, a intersecção das proposições que estão no conjunto X. Com essa nova definição, não é difícil ver que q é necessária em b no modelo acima, isto é, $[\![\Box q]\!]^b = 1$. Temos, pela construção do modelo, que $f(b) = \{\{b\},U\}$. A intersecção de $\{b\}$ e U é o próprio conjunto $\{b\}$. Como $\{b\} \subseteq \{b,c\}$, e $(q)^M = \{b,c\}$, a cláusula (g‴) garante que $[\![\Box q]\!]^b = 1$. Assim, se $f(b)$ dá a coleção das normas do ponto b, uma proposição será obrigatória em b se for consequência lógica desse conjunto de normas – o que acontece com q.

Há ainda vários outros refinamentos que se pode fazer com relação a esse tipo de modelo, como veremos no decorrer da próxima seção, em que passamos a considerar o que essa maquinaria toda pode ter a ver com modais em uma linguagem com o português brasileiro.

5. Auxiliares modais e os limites da semântica de vizinhanças

Vamos recapitular brevemente aonde nossa investigação sobre a relação entre os auxiliares modais nas línguas naturais e os operadores modais em sistemas lógicos nos levaram. Matematicamente falando, temos uma imensa diversidade de objetos bem definidos comportando-se de maneiras bem definidas. Correspondem eles a objetos similares nas linguagens naturais? Pelo menos a alguns deles, sim. E em certa medida, sim também. Por exemplo, podemos dizer que o auxiliar modal ‘pode’ corresponde à contraparte matemática representada pelo losango. Teríamos, então, a paráfrase abaixo para a sentença (1), ‘João pode estar na festa’:

(1′) Há uma situação alternativa em que João está na festa.

Ou seja, (1) corresponde a

(2) ⟨pode⟩ (João está na festa),

e isso é verdadeiro em nosso ponto de valoração preferido (o “mundo real”, o ponto em que a sentença é proferida) de acordo com o seguinte:

$$[\![\langle \text{pode}\rangle \text{ (João está na festa)}]\!]^r = 1$$

se, e somente se,

há algum ponto y tal que Rry e $[\![\text{João está na festa}]\!]^y = 1$.

Isso faz de ‘pode’ uma espécie de losango – *qual* losango depende de quais condições colocamos sobre a relação de acessibilidade, no caso de modelos relacionais. Estamos considerando alternativas epistêmicas para a situação real? Deônticas? Qualquer situação alternativa (qualquer mundo logicamente possível)? Corresponde a cada um desses significados de ‘pode’ um operador modal distinto – um losango distinto – cada qual com sua própria a uma relação de acessibilidade?

Como vimos, modelos relacionais não parecem ser adequados para reproduzir os auxiliares modais, porque tais modelos, mesmo os mais simples, são “fortes demais” para várias modalidades (epistêmicas e deônticas, por exemplo), já que nos levam a afirmar que da verdade de uma sentença como (3), interpretada epistemicamente, se segue logicamente que o falante sabe todas as consequências que se seguem, incluindo todas as tautologias. No entanto, não é assim que a nossa mente funciona.

Uma análise melhor é em termos de modelos de vizinhanças, já que podemos evitar a onisciência dos modelos relacionais. Mas ela também tem seus limites. Antes de mostrarmos esses limites, vejamos como eles aparecem no modelo que Kratzer propõe. A primeira diferença com relação aos sistemas formais que apresentamos até aqui é que, no modelo de Kratzer, os auxiliares modais são operadores binários, que relacionam uma proposição a um *fundo conversacional*, que irá fixar o tipo de modalidade. Assim, a sentença em (1), com a interpretação epistêmica, tem a seguinte forma lógica:

$$\langle \text{pode}\rangle \text{ ((dado o que o falante sabe), (João está na festa)).}$$

Note-se que o losango $\langle$pode$\rangle$ passa a ser um operador binário, tendo como argumentos ‘dado o que o falante sabe’ e ‘João está na festa’. O argumento ‘dado o que o falante sabe’ é fornecido pelo fundo conversacional, o conjunto de proposições compartilhadas pelos interlocutores. O fundo conversacional pode ser dito explicitamente, como em ‘Por tudo o que eu sei, o João está na festa.’, ou pode ser dado pelo contexto, pela situação de interlocução. Se o fundo for epistêmico, a relação entre os mundos que o compõem será reflexiva, ou seja, ao avaliarmos a sentença 'João pode estar na festa' levamos em consideração o mundo real.

Resumindo, no caso mais simples podemos apresentar as condições de verdade de muitas sentenças com auxiliares modais por meio de modelos de vizinhanças, em que uma função de vizinhanças f representa um fundo conversacional. Em um modelo de vizinhanças $\langle U,f,V\rangle$ a função f associa a cada ponto x de U um conjunto de proposições, as vizinhanças de x, que podem ser entendidas como as proposições *necessárias* em x, ou as *normas* de x, ou o que é *sabido* em x, ou o que é *crença comum* em x: na terminologia de Kratzer, um *fundo conversacional*. Note-se que, de um ponto de vista formal, podemos generalizar essa noção de modelo e ter *mais de uma* função de vizinhanças em um modelo (assim como podemos ter mais de uma relação de acessibilidade em um modelo relacional): podemos definir um modelo como uma quádrupla $\langle U, f_e, f_d, V\rangle$, em que f_e é um fundo conversacional epistêmico e f_d, deôntico, e o 'tem que' em 'João tem que estar na festa' será avaliado como uma necessidade epistêmica ou deôntica dependendo de qual fundo conversacional for escolhido. Isso será determinado pelo contexto em que a sentença 'João pode estar na festa' é proferida.

Para Kratzer, dado um fundo conversacional f, uma proposição p é *necessária* (sabida, obrigatória etc.) em x se p é consequência lógica de $f(x)$, isto é, se $\cap f(x) \subseteq p$. Kratzer denomina isso uma *necessidade simples* ou *f-necessidade*. E como possibilidade é o dual de necessidade, p é possível em x se $\neg p$ não é uma necessidade em x.

Várias propriedades de um fundo conversacional f podem ser formalmente definidas. Por exemplo, se $f(x)$ representa o conhecimento que se tem em um ponto x, então gostaríamos que as proposições em $f(x)$ fossem verdadeiras em x. Para isso, basta exigir, ao construir o modelo, que x pertença à intersecção das proposições que estão em $f(x)$. É o que Kratzer denomina um *fundo conversacional realístico*. Mas temos agora de volta o problema da necessidade: se a sentença em (3) for verdadeira num fundo conversacional epistêmico (e, portanto, realista), então segue-se que João está na festa, mas novamente essa não é a nossa intuição. O que fazer agora?

Note-se que isso não ocorre se o fundo conversacional é deôntico, porque podemos considerar que tal fundo conversacional não é realista: o mundo real não precisaria estar entre os mundos de vizinhança. Obtemos o resultado desejado de que nem sempre as normas são cumpridas, mas perdemos algo extremamente valioso para as línguas naturais: seja qual for a modalidade, estamos, de alguma forma sempre falando sobre o mundo real. Como resolver esse problema?

Finalmente, iniciamos este artigo apresentando três auxiliares modais: 'pode', 'deve' e ‘ter que’. Aparentemente uma diferença entre os dois operadores de necessidade ‘deve’ e ‘ter que’ é que ‘ter que’ parece mais forte do que ‘deve’. Von Fintel & Iatridou (2008) iniciam sua reflexão sobre os modais ‘must’ e ‘should’ no inglês chamando atenção para um cartaz, no banheiro de um restaurante, que poderia ser traduzido no português por: ‘Funcionários têm que lavar as mãos; os clientes devem lavar as mãos.’ Isso mostra uma diferença entre os dois operadores, parecendo também implicar que ‘tem que’ é mais estrito do que ‘deve’. Além disso, como mostram Pires de Oliveira & Scarduelli (2008), ‘ter que’ parece não deixar alternativas, enquanto que ‘deve’ sugere o melhor a ser feito, deixando espaço para alternativas. A sentença ‘Para entrar em Florianópolis de carro, você tem que atravessar a ponte.’ é verdadeira, ao passo que a sentença ‘Para entrar em Florianópolis de carro, você deve atravessar a ponte.’ parece inadequada porque sugere que há mais de um modo de se chegar de carro a Florianópolis, sendo atravessar a ponte o melhor deles.

Modalidades em línguas naturais não se esgotam em simples necessidades e possibilidades. Dentre as proposições possíveis em alguma situação, algumas serão mais remotas do que outras. Um exemplo dado por Kratzer envolve uma investigação policial sobre um assassinato cometido em um vilarejo. No exemplo, há uma boa possibilidade de que *A* seja o assassino, mas também é possível (ainda que menos provável) que *B* seja o assassino. E ainda que seja possível que o assassinato tenha sido cometido por algum viajante *C* vindo de um país longínquo e por acaso de passagem pelo vilarejo, essa possibilidade é muito mais remota.

Para um outro exemplo, consideremos os condicionais a seguir:

(12) Se eu tivesse saído mais cedo, teria alcançado o ônibus.

(13) Se eu tivesse saído mais cedo, o ônibus teria tido um acidente.

Condições de verdade para condicionais como os acima costumeiramente também são formuladas em termos de mundos possíveis (ver, por exemplo, Lewis 1973): em todos os mundos em que o antecedente é verdadeiro, o consequente é verdadeiro. Mas há mundos e mundos: a aceitabilidade de (13) parece ser bem menor que a de (12). Mundos em que o ônibus sofre um acidente, ou em que o assassino foi o viajante *C*, estão “bem mais distantes” do mundo real – são bem menos semelhantes a ele.

A solução para esses limites da semântica de vizinhanças será acoplá-la a uma *semântica de ordenação*. Essa é a contribuição de Kratzer para os sistemas formais. Por exemplo, para conseguirmos capturar que da verdade da sentença em (3) interpretada epistemicamente não se segue que João está na festa, mas que, se tudo estiver dentro da normalidade, é isso o que irá ocorrer, acrescentamos a nossos modelos um fundo conversacional estereotípico, vamos denominá-lo g, que especifica o que é “normal”, o que é “esperado” para cada situação. As proposições contidas em tal fundo induzem uma ordenação entre os pontos do modelo: alguns pontos ficam mais perto da normalidade do que outros. Em consequência, podemos caracterizar algumas possibilidades como “melhores” do que outras. Um modelo, assim, seria uma quádrupla $\langle U,f,g,V\rangle$, em que f é um fundo conversacional e g associa a cada ponto x um conjunto $g(x)$ de proposições que descrevem o que é normal em x. Esse conjunto $g(x)$ de proposições induz uma ordenação – vamos indicá-la por $\leq_{g(x)}$ – entre os pontos de valoração. Dados quaisquer pontos y e z, e p uma proposição,

$$y \leq_{g(x)} z \quad \text{sse} \quad \{p \in g(x) : z \in p\} \subseteq \{p \in g(x) : y \in p\}.$$

Em outras palavras, y está pelo menos tão perto do padrão de normalidade dado pelas proposições em $g(x)$ quanto z se qualquer proposição de $g(x)$ que for verdadeira em z também é verdadeira em y. Naturalmente, mais proposições de $g(x)$ podem ser verdadeiras em y do que em z; nesse caso, temos $y <_{g(x)} z$.

Com essas alterações, nossa cláusula (g) na definição de verdade fica alterada para:

(g′′′) $[\![\Box\varphi]\!]^{x} = 1$ sse para todo $y \in \bigcap f(x)$, há um $z \in \bigcap f(x)$ tal que

(i) $z \leq_{g(x)} y$, e

(ii) para todo $u \in \bigcap f(x)$: se $u \leq_{g(x)} z$ então $u \in (\varphi)^{M}$.

Intuitivamente, φ é uma necessidade em um certo ponto x, dados os fundos conversacionais f e g, se φ for verdadeira em todos os pontos que chegam mais perto do ideal determinado pela fonte de ordenação g – pontos mais “longínquos” são desconsiderados. Note-se que o mundo real pode estar entre os mundos longínquos. Assim, por tudo o que o falante sabe (3) é verdadeira porque ela afirma que em todos os mundos que estão mais próximos dos mundos normais, o João está na festa; mas talvez o mundo real não seja um mundo normal, logo, não podemos concluir que ele está efetivamente na festa. Nesse quadro, φ é uma *possibilidade* em x com relação a f e g se sua negação não for uma necessidade.

A estratégia acima também dá conta do fato de que, na semântica de vizinhanças, de uma necessidade deôntica não se segue a verdade da proposição prejacente porque o fundo conversacional não é reflexivo. Como vimos, em modelos relacionais esse movimento corresponde a não considerar o mundo real como estando acessível. Mas certamente quando expressamos obrigação ou permissão levamos em consideração o mundo real. Em modelos com ordenação, capturamos o fato de que uma obrigação será cumprida nos mundos ideais e naqueles mais próximos de tais mundos – contudo, o mundo real pode estar bem longe dos mundos ideais em que as leis ou são seguidas a risca ou infrações são punidas. Isso é possível porque ordenamos os mundos de acordo com as leis.

Modelos de vizinhanças dotados de uma fonte de ordenação permitem-nos ainda comparar de várias maneiras as proposições com relação a sua possibilidade. Uma sugestão apresentada por Kratzer (2012: 41) é a seguinte: dadas duas proposições p e q, desconsideramos os pontos que elas têm em comum, e analisamos os conjuntos $p - q$ e $q - p$: verificando se há algum ponto em $q - p$ que fica mais perto do ideal dado por g que todos os pontos em $p - q$. Se não, p é uma possibilidade pelo menos tão boa quanto q.

Naturalmente não temos aqui espaço para uma apresentação detalhada da teoria de Kratzer, nem de como adaptá-la a expressões modais do PB. Este é um convite para mais pesquisas. Mas esperamos ter apresentado ao leitor uma ideia inicial a respeito da grande diversidade, em linguagens formais, de operadores que podem ser classificados como modais, e de como podem ser úteis na formulação das condições de verdade para sentenças modalizadas em uma língua natural.[9]

REFERÊNCIAS

1. BLACKBURN, Patrick; DE RIJKE, Maarten; VENEMA, Yde. *Modal logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
2. BORGES NETO, J. ; MULLER, A. ; PIRES de OLIVEIRA, R. . A semântica formal das línguas naturais: histórias e desafios. *Revista de Estudos da Linguagem*, v. 20–1, p. 119–48, 2012.
3. KRATZER, Angelika. *Modals and Conditionals*. Oxford: Oxford University Press, 2012.
4. LEWIS, David. *Counterfactuals*. Oxford: Blackwell, 1973
5. PIRES DE OLIVEIRA, R. & BASSO, R. A arquitetura da conversação. Teorias da

9 Agradecemos a um *referee* anônimo as sugestões feitas.

Implicatura. São Paulo: Parábola, 2014.

6. PIRES DE OLIVEIRA, Roberta.; SCARDUELLI, Jaqueline. Explicando as diferenças semânticas entre ‘ter que’ e ‘deve’: uma proposta em semântica de mundos possíveis. Alfa Revista de linguística (UNESP. São José do Rio Preto. Online), v. 52, p. 215–36, 2008.
7. VON FINTEL, Kai. “Modality and Language”. In Encyclopedia of Philosophy – Second Edition, edited by Donald M. Borchert. Detroit: MacMillan Reference USA, 2006. Most recent version online at http://mit.edu/fintel/www/modality.pdf
8. VON FINTEL, Kai; IATRIDOU, Sabine. How to say ought in foreign: the composition of weak necessity modals. In: Guéron, J.; LECARME, J. (eds). *Time and Modality*. Studies in Natural Language and Linguistic Theory. V. 75. New York: Springer, 2008, pp. 115–41.

ABSTRACT: This paper aims to show the contribution of ordering semantics, as presented by Angelika Kratzer, in the development of formal systems employed in the semantical description natural languages. We will discuss what are modal operators, from a logical point of view, and analyze the relations between such formal models and modal auxiliaries in a natural language such as Brazilian Portuguese.
KEYWORDS: Modal operators; relational models; neighbourhood models; ordering semantics.